

## LAGRANGEOVSKÝ PŘÍSTUP K ŘEŠENÍ KONVEKTIVNĚ-DISPERZNÍ ROVNICE PRO VODOU NENASYCENÉ PÓROVITÉ PROSTŘEDÍ

JIRÍ ŠIMŮNEK

Ve studii jsou diskutovány a srovnány výsledky dvou metod založených na lagrangeovském přístupu k řešení konvektivně-disperzní rovnice (první metoda používá deformující se diskretizační síť, druhá metoda fixní diskretizační síť s deformujícími se souřadnicemi) s metodou Eulerovou (řídící rovnice je diskretizována na fixní prostorové síti) a s řešením analytickým. První Lagrangeova metoda je založena na výpočtu časově prostorových křivek (trajektorií), které reprezentují deformující se síť pro numerické řešení. Metoda používá bilancování vlhkosti mezi jednotlivými trajektoriemi pro výpočet jejich průběhu namísto bodových rychlostí. Druhá Lagrangeova metoda (jednokrokové zpětné sledování částic) pohybuje v každém časovém kroku fiktivní body z předchozí pozice tak, že na konci časového intervalu splynou s body diskretizační sítě. Eulerovská metoda používá pro prostorovou i časovou diskretizaci metody konečných diferencí.

Shoda výsledků s analytickým řešením pro všechny tři metody je velmi dobrá pro nízká Pecletova čísla. Pro vysoká Pecletova čísla se Eulerova metoda stává nestabilní. Obě Lagrangeovy metody vykazují i nadále stabilní chování a relativně dobrou shodu s analytickým řešením.

**KLÍČOVÁ SLOVA:** Advekčno-disperzní rovnice, nenasyčené pórovité prostředí, Lagrangeova metoda, Eulerova metoda.

Jiří Šimůnek: Lagrangian Approach to the Solution of the Advection-Dispersion Equation for Porous Media Unsaturated by Water. *Vodohosp. Čas.*, 39, 1991, 2; 13 refs, 3 figs.

In the article the results of two Lagrangian methods (the first one utilizes a deforming grid, the second one a fixed grid in deforming coordinates) are discussed and compared with the results of the Eulerian method (the governing equation is discretized on a grid fixed in space) and with the analytical solution. The first Lagrangian method — time depth particle tracking — is based on the calculation of the time depth curves which represent a deforming grid for solution of advection-

Ing. Jiří Šimůnek, Výzkumný ústav pro zúrodnování zemědělských půd, Bažantní 697, 160 00 Praha 6.

dispersion equation. The method uses the balancing of moisture by particles for calculating their position instead of point velocities. The second Lagrangian method — single step reversed particle tracking — moves at each time step fictitious points from a backward position so that at the end of the time step they merge with fixed grid nodes. The Eulerian method uses the finite difference discretization in space and in time.

The agreement of the results of all three methods with the analytical solution is excellent for low Peclet numbers. For high Peclet numbers the Eulerian method becomes unstable whereas both Lagrangian methods show good agreement of the results.

**KEY WORDS:** Advection-Dispersion Equation, Unsaturated Porous Media, Lagrangian Method, Eulerian Method.

Иржи Шимунек: Метод Лагранжа к решению конвективно-дисперсионного уравнения для пористой среды, ненасыщенной водой. *Vodohosp. Čas.*, 39, 1991, 2; 13 лит., 3 рис.

В статье обсуждены и сравнены результаты двух методов, основанных на методе Лагранжа к решению конвективно-дисперсионного уравнения (первый метод применяет деформирующуюся дискретизационную сеть, второй метод фиксирует деформирующуюся дискретизационную сеть с деформирующимися координатами) с методом Эйлера (управляющее уравнение дискретизировано на фиксированной пространственной сети) и с решением аналитическим. Первый метод Лагранжа основан на расчете временно пространственных кривых (траекторий), которые представляют деформирующуюся сеть для численного решения. Применяется метод водного баланса влажности между отдельными траекториями для расчета их хода вместо точечных скоростей. Второй метод Лагранжа (одношаговое обратное наблюдение частиц) перемещает в каждом временном шагу фиктивные точки из предыдущей позиции так, что в конце временного интервала они сольются с точками дискретизационной сети. Метод Эйлера применяет для пространственной и временной дискретизации метод конечных разностей.

Совпадение результатов с аналитическим решением для всех трех методов очень хорошее для низких чисел Пецлета. Для высоких чисел Пецлета метод Эйлера становится нестабильным. Оба метода Лагранжа оказывают стабильное поведение и относительно хорошее совпадение с аналитическим решением

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** уравнение дисперсии, ненасыщенная пористая среда метод Лагранжа, метод Эйлера.

### Úvod

Většinu numerických metod řešení konvektivně-disperzní rovnice lze rozdělit do dvou hlavních kategorií — eulerovské a lagrangeovské (Sorek [9]). V případě eulerovského přístupu je řídící rovnice diskretizována na neměnné

pro... vé síti. Tento přístup bez ohledu na použitou metodu řešení (konečné prvky, konečné diference atd.) je spojen s problémy numerické disperze a vážnými nestabilitami řešení v oblastech s vysokými Pecletovými čísly (van Genuchten [5]). Překonat tyto problémy lze použitím metod založených na langrangeovském přístupu (Neuman a Sorek [8]) nebo kombinaci obou přístupů (Sorek [9], Baptista [1]). V předložené práci jsou diskutovány dvě metody využívající lagrangeovský přístup (první metoda používá deformující se prostorovou diskretizaci, druhá metoda fixní diskretizační síť s deformujícími se souřadnicemi) a jimi získané výsledky jsou porovnány s analytickými řešeními a s výsledky Eulerovy metody.

## Teorie

### Rovnice proudění

Jednorozměrné proudění vody v částečně nasyceném pórovitém prostředí je možno popsat modifikovanou Richardsovou rovnicí:

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(h) \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \cos \alpha \right] \right\} - S(h), \quad (1)$$

kde  $h$  je tlaková výška [L],  $K$  — hydraulická vodivost [L/T],  $C$  — specifická vodní kapacita [L<sup>-1</sup>],  $S$  — propadový (extrakční) člen (T<sup>-1</sup>),  $x$  — prostorová souřadnice [L],  $\alpha$  — úhel odklonění osy proudění od osy orientované svisle vzhůru [°],  $t$  — čas [T]. Jednotlivé členy a parametry rovnice proudění a okrajové a počáteční podmínky jsou podrobně diskutovány v lit. [12, 13].

### Transportní rovnice

Transport rozpuštěných látek při jednorozměrném izotermním darcyovském proudění vody v částečně nasyceném pevném pórovitém prostředí je popsán transportní rovnicí:

$$\Theta \frac{\partial c}{\partial t} + \rho k \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Theta D \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \Theta v \frac{\partial c}{\partial x} - Fc - G, \quad (2)$$

kde  $c$  je koncentrace rozpuštěné látky [M L<sup>-3</sup>],  $\Theta$  — vlhkost [—],  $\rho$  — objemová hmotnost porézního prostředí [M L<sup>-3</sup>],  $v$  — pórová rychlost proudění vody [L T<sup>-1</sup>] a  $D$  je disperzní koeficient [L<sup>2</sup> T<sup>-1</sup>]. Nekonzervativnost proudění rozpuštěné látky je popsána pomocí rychlostních konstant prvního a nultého řádu

$F$  [T<sup>-1</sup>] a  $G$  [M L<sup>-3</sup> T<sup>-1</sup>] a empirické konstanty  $k$  [L<sup>3</sup> M<sup>-1</sup>], ...ující sklon adsorpční izotermy.

Tuto rovnici je složité řešit přesně numerickými metodami, protože popisuje zároveň disperzní i konvektivní transport. Zanedbáním konvektivního členu získáme parciálně diferenciální parabolickou rovnici druhého řádu, zanedbáním disperzního členu parciálně diferenciální hyperbolickou rovnici prvního řádu. Použitím hydrodynamické derivace

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \quad (3)$$

získáme výchozí rovnici pro numerické řešení

$$\Theta \frac{Dc}{Dt} + \rho k \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Theta D \frac{\partial c}{\partial x} \right) - Fc - G. \quad (4)$$

První člen nyní představuje změnu koncentrace pohyblivé částice, která se pohybuje podél trajektorie

$$Dx = v Dt. \quad (5)$$

### Numerické řešení

#### a) Výpočet koncentrace podél trajektorií (TDC)

Na základě řešení Richardsovy rovnice (1) lze pomocí bilancování vlhkosti a extrakčních procesů v půdním profilu a průtoků přes hranice oblasti získat trajektorie proudících částic (Duyisveld [4], Boekhold [2], Šimůnek [11]) pomocí následujícího algoritmu.

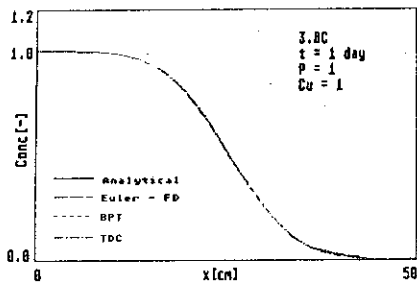
První sledovaná částice pod půdním povrchem se v čase  $t = t_0$  nachází v hloubce  $x = x_0$ . Mezi touto částicí a povrchem půdy  $h$  je množství vody  $W_0$  [L]:

$$W_0 = \int_{x_0}^b \Theta(x, t_0) dx. \quad (6)$$

Během časového intervalu  $(t_0, t_1)$  projde povrchem půdy množství vody  $N$  [L]:

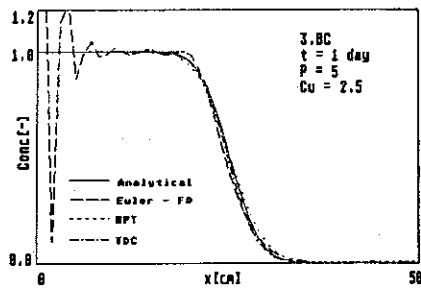
$$N = \int_{t_0}^{t_1} [E_a(t) - I_a(t)] dt, \quad (7)$$

kde  $E_a(t)$  [L T<sup>-1</sup>] je aktuální výpar a  $I_a(t)$  [L T<sup>-1</sup>] je skutečná infiltrace ze srážky



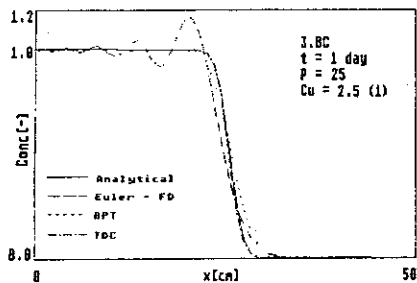
Obr. 1. Koncentrační profily pro  $P = 1$  a  $C_u = 1$ .

Fig. 1. Calculated concentration distribution versus depth for  $P = 1$  and  $C_u = 1$ .



Obr. 2. Koncentrační profily pro  $P = 5$  a  $C_u = 2,5$ .

Fig. 2. Calculated concentration distribution versus depth for  $P = 5$  and  $C_u = 2,5$ .



Obr. 3. Koncentrační profily pro  $P = 25$  a  $C_u = 2,5$  (1).

Fig. 3. Calculated concentration distribution versus depth for  $P = 25$  and  $C_u = 2,5$  (1).

nebo závlahy. Během téhož intervalu je vrstva mezi půdním povrchem a sledovanou částicí ochuzena kofenovou zónou extrakcí o transpirované množství  $S$  [L]:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_a(t)}^{x_b(t)} S(x, t) dx dt, \quad (8)$$

kde  $S(x, t)$  je propadový extrakční člen [ $T^{-1}$ ]. V čase  $t_1$  se tedy mezi povrchem půdy a sledovanou částicí nachází množství vody  $W_1$  [L]:

$$W_1 = W_0 - N - S, \quad (9)$$

tzn. sledovaná částice se nachází v hloubce  $x = x_1$ .

$$\int_{x_1}^b \Theta(x, t_1) dx = \int_{x_0}^b \Theta(x, t_0) dx - \int_{t_0}^{t_1} [E_a(t) - I_a(t)] dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x(t)}^b S(x, t) dx dt. \quad (10)$$

Opakovaným řešením rov. (10) získáme trajektorii sledované částice.

Výpočet druhé a dalších částic je možné provést analogickým způsobem. Nyní se ovšem bilancuje množství vody mezi dvěma následujícími částicemi. Mezi těmito částicemi je v čase  $t_0$ , resp.  $t_1$  množství vody  $W_0$ , resp.  $W_1$ .

$$W_0 = \int_{x_a(t_0)}^{x_b(t_0)} \Theta(x, t_0) dx, \quad W_1 = \int_{x_a(t_1)}^{x_b(t_1)} \Theta(x, t_1) dx. \quad (11)$$

Během časového intervalu  $(t_0, t_1)$  je množství vody mezi oběma částicemi ochuzeno o transpirační množství  $S$ :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_a(t)}^{x_b(t)} S(x, t) dx dt. \quad (12)$$

Výsledná rovnice má nyní tvar:

$$\int_{x_a(t_1)}^{x_b(t_1)} \Theta(x, t_1) dx = \int_{x_a(t_0)}^{x_b(t_0)} \Theta(x, t_0) dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_a(t)}^{x_b(t)} S(x, t) dx dt. \quad (13)$$

Na základě rov. (10) a (13) lze vypočítat trajektorie částic bez nutnosti použít značně větší chybou zatížený výpočet pomocí Darcyho-Buckinghamova zákona.

Vlastní simulace transportu rozpuštěných látek probíhá následujícím způsobem: Na každé časové úrovni  $t_n$  se postupně řeší soustava lineárních rovnic vzniklá diskretizací Richardsovy rovnice (1), sestavená pro všechny vnitřní uzly řešené oblasti, spolu se zavedenými okrajovými podmínkami v krajních uzlech. Protože koeficienty  $K(h)$  a  $C(h)$  jsou vzhledem k neznámé  $h$  nelineární, probíhá na každé časové úrovni iterační řešení soustavy rovnic. Po skončení iteračního procesu (neznámá tlaková výška  $h$  se ve dvou po sobě jdoucích iteracích liší dostatečně málo) se přejde k výpočtu trajektorií částic. Ze známé polohy částic na počátku časového intervalu a vyřešeného vývoje vlhkostního profilu, a ze skutečných hodnot infiltrace, výparu a transpirace se pomocí rov. (10) vypočte nová poloha první sledované částice. Poté se pomocí rov. (13) vypočtou nové polohy všech ostatních částic. Podle aktuální situace na obou okrajích profilu mohou vznikat, resp. půdní profil opouštět, nové částice. Jelikož rozložení diskretizační sítě během výpočtu již není ovlivnitelné, mohou nastat situace, kdy

vlivem extrakčního členu  $S$  dojde ke kumulaci více bodů ve velmi malém prostoru s možností nestability výpočtu. V takovém případě je nutné tyto částice z výpočtu eliminovat.

Souřadnice trajektorií v jednotlivých časových úrovních představují diskretizační schéma pro numerické řešení pravé strany konvektivně-disperzní rovnice (4) některou z běžně používaných metod (konečné diference, konečné prvky ...). Časové derivace na levé straně jsou nahrazeny časovými diferencemi, přičemž v prvním členu je nutné uvažovat koncentraci v předešlé časové úrovni odpovídající předešlé pozici dané částice, zatímco v druhém členu koncentraci na téže pořadnici jako v aktuální časové úrovni. Tuto koncentraci lze získat lineární interpolací mezi koncentracemi okolních částic. Výsledná soustava lineárních rovnic se sestaví diskretizací rov. (4) pro všechny vnitřní body oblasti (částice) a v krajních fixních bodech se zavedou okrajové podmínky. Po vyřešení soustavy se přímo přechází na další časovou úroveň.

Výsledkem řešení jsou koncentrace podél jednotlivých trajektorií. Pokud je nutné znát koncentrace v pevných bodech, je nutné interpolovat mezi jednotlivými částicemi.

#### b) Výpočet koncentrace při konstantní prostorové diskretizaci (Sorek [9] — (BPT))

Pro diskretizaci pravé strany a druhého členu rov. (4) jsou použity fixní body. Pro diskretizaci prvního členu je však nutné znát pro každou částici nacházející se v aktuální časové úrovni v jednotlivých bodech sítě jejich polohu v předešlé časové úrovni. Tuto polohu hledáme tak, že pohybujeme fixním bodem z pozice  $x_n^k$  v předešlé časové úrovni  $t^k$ , aby v aktuální časové úrovni  $t^{k+1}$  splynul s bodem  $n$  podle rov. (5)

$$x_n^k = x_n^{k+1} - \int_{t^k}^{t^{k+1}} v \, Dt. \quad (14)$$

V dalším výpočtu postupujeme obdobně jako v kapitole a).

#### c) Eulerovský přístup (FD)

Ke srovnávacím výpočtům byl použit model SWMI-ST (Šimůnek [10]) s alternativní volbou prostorové diskretizace metodou konečných prvků nebo konečných rozdílů. Časovými derivacemi jsou v tomto modelu nahrazeny konečné diference při použití Crankova-Nicholsonova schématu:

### Analytické řešení

Pro stacionární podmínky proudění existuje pro rovnici (2) a pro různé kombinace počátečních a okrajových podmínek celá řada analytických řešení. Ke srovnání jednotlivých numerických metod je použito analytické řešení pro rovnici (2) s nulovou adsorpcí a s nulovými propadovými členy, popisující transport v polonekonečném profilu s okrajovou podmínkou třetího typu a nulovou počáteční podmínkou (Lindstrom et al. [7]):

$$c(x, t) = c_0 \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x - vt}{2(Dt)^{1/2}} \right] + \left( \frac{v^2 t}{\pi D} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(x - vt)^2}{4Dt} \right] - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{vx}{D} + \frac{v^2 t}{D} \right) \exp \left( \frac{vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left[ \frac{x + vt}{2(Dt)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (15)$$

kde  $c_0$  je koncentrace vstupující kapaliny.

### Srovnání numerických výsledků s analytickým řešením

Pro srovnání výsledků dvou numerických metod založených na lagrangeovském přístupu k řešení konvektivně disperzní rovnice s výsledky metody založené na eulerovském přístupu a s řešením analytickým jsou použity tři varianty proudění s různými transportními parametry a různou časovou diskretizací. Pro jednotlivé varianty jsou počítána lokální Pecletova a Courantova čísla

$$P = \frac{v \Delta x}{D}, \quad (16)$$

$$C_u = \frac{v \Delta t}{\Delta x}, \quad (17)$$

kde  $\Delta x$  a  $\Delta t$  představují velikost prostorového a časového kroku. Tato čísla jsou používána jako kritéria stability numerických metod řešení konvektivně disperzní rovnice. Huyakorn a Pinder [6] a Burnett a Frind [3] doporučují, aby lokální Pecletovo číslo při použití metody konečných lineárních elementů nepřekročilo hodnotu 2 a lokální Courantovo číslo bylo nejvýše 1.

Pro všechny tři varianty je použita shodná prostorová diskretizace ( $\Delta x = 1$  cm) a shodná rychlost proudění ( $v = 25$  cm/den). Jednotlivé varianty se liší pouze disperzním koeficientem a časovou diskretizací. V počátečních stá-

diích simulace byl vždy použit malý časový krok, který se postupně zvyšoval, až dosáhl hodnoty  $\Delta t_{\max}$ , ze které bylo počítáno lokální Courantovo číslo.

*Varianta 1:* Pro první příklad byly uvažovány takové transportní parametry, které splňují doporučená kritéria stability. Disperzní koeficient  $D$  je  $25 \text{ cm}^2/\text{den}$  a  $\Delta t_{\max} = 0,04$  dne, tzn. lokální Pecletovo i Courantovo číslo je rovné 1. Všechny tři metody dávají prakticky výsledky shodné s analytickým řešením.

*Varianta 2:* Pro tuto variantu byl disperzní koeficient uvažován hodnotou  $5 \text{ cm}^2/\text{den}$  a maximální časový krok hodnotou 0,1 dne. Lokální Pecletovo číslo se nyní rovná 5 a lokální Courantovo číslo 2,5, tzn., že obě doporučená kritéria stability jsou překročena. Výsledkem toho je, že numerická metoda založená na eulerovském přístupu je nestabilní s výraznými oscilacemi. Při vyšších hodnotách simulačního času dojde k naprostému rozpadu řešení. Obě lagrangeovské metody vykazují shodu výsledků s analytickým řešením.

*Varianta 3:* Pro poslední příklad byl uvažován disperzní koeficient hodnotou  $1 \text{ cm}^2/\text{den}$  a maximální časový krok hodnotou 0,1 dne. Lokální Pecletovo číslo dosahuje hodnoty 25 a lokální Courantovo číslo 2,5. Pro tuto kombinaci parametrů se metoda založená na eulerovském přístupu zcela rozpadla ještě před dosažením konečného simulačního času 1 den. Proto byla v tomto případě snížena maximální hodnota časového kroku 0,04 dny, tj. lokální Courantovo číslo na 1. Po této úpravě metoda vykazovala velké oscilace v blízkosti koncentračního čela, které se s ním plynule posouvaly po profilu. Výsledky Lagrangeovy metody spojené s výpočtem trajektorií částic jsou i v tomto případě ve vysoké shodě s analytickým řešením. Výsledky druhé Lagrangeovy metody vykazují nepatrné zploštění koncentračního čela vlivem numerické disperze.

## Závěr

Ve studii je předložena numerická metoda řešení konvektivně disperzní rovnice, založená na lagrangeovském přístupu, využívající k prostorové diskretizaci trajektorie proudících částic. Tato metoda je srovnána s další Lagrangeovou metodou (jednokrokové zpětné sledování částic), používající k prostorové diskretizaci fixní body, s numerickou metodou založenou na eulerovském přístupu a s analytickým řešením. Pro malé hodnoty lokálních Pecletových a Courantových čísel dosahují všechna řešení vysoké shody. Pro vyšší hodnoty Pecletova a Courantova čísla se Eulerova metoda stává nestabilní s výraznými oscilacemi za koncentračním čelem, zatímco obě Lagrangeovy metody vykazují vysokou shodu s analytickým řešením. Pro Pecletova čísla větší než 20 dochází k zplošťování koncentračního čela u druhé Lagrangeovy metody a pouze meto-

da využívající k prostorové diskretizaci trajektorií proudících částic vykazuje i nadále vysokou shodu výsledků s analytickým řešením. Tím se vyvažuje nevýhoda spočívající ve značně složitějším numerickém algoritmu.

## LITERATURA

- [1] BAPTISTA, A. M.—ADAMS, E. E.—STOLZENBACH, K. D.: Accuracy analysis of the backwards method of characteristics. Proc. 6th Inter. Conf. F. E. W. R., Lisbon, Portugal 1986, s. 447—488.
- [2] BOEKHOLD, A. E.: Waterbeweging en stofftransport in de onverzadigde zone van de bodem. Nota 171, Haren, Instituut voor Bodem-vruchtbaarheid 1987.
- [3] BURNETT, R. D.—FRIND, E. D.: A comparison of transport simulation in two and three dimensions using alternating direction Galerkin technique. Proc. 6th Inter. Conf. F. E. W. R., Lisbon, Portugal 1986, s. 447—488.
- [4] DUYISVELD, W. H. M.: Entwicklung und Anwendung von Simulationsmodellen für den Wasserhaushalt und den Transport von gelosten Stoffen in wasserungesättigten Boden. Ermittlung den Nitratauswaschungsgefahr unter Ackernutzung. [Dissertation.] Berlin, Technischen Universität 1984, 204 p.
- [5] GENUCHTEN, M. Th. van: On the accuracy and efficiency of several numerical schemes for solving the convective-dispersive equation. Proc. 11th Inter. Conf. F. E. W. R., Princeton, USA 1976, s. 1.71—1.90.
- [6] HUYAKORN, P. S.—PINDER, G. F.: Computational methods in subsurface flow. Academic Press 1983.
- [7] LINDSTROM, F. T.—HAGUE, R.—FREED, V. H.—BOERSMA, L.: Theory on the movement of some herbicid in soils; Linear diffusion and convection of chemical in soils. Environ. Sci. Technol. 1967, 1, p. 561—565.
- [8] NEUMAN, S. P.—SOREK, S.: Eulerian-Lagrangian method for advection dispersion finite element in water resources. Proc. 4th Inter. Conf. W. E. W. R., Hannover, Germany 1982, s. 1441—1468.
- [9] SOREK, S.: Two-dimensional adaptive Eulerian-Lagrangian method for mass transport with spatial velocity distribution. Tr. in Porous Media, 3, 1988, s. 473—489.
- [10] ŠIMŮNEK, J.: SWMI-ST — Numerický model jednorozměrného proudění kapaliny a rozpustěných látek v nenasyčeném pórovitém prostředí. Příspěvek symposia Hornická Příbram ve vědě a technice, Příbram 1989.
- [11] ŠIMŮNEK, J.: Numerická simulace transportních procesů chemických látek v půdě. Vodohosp. Čas., 39, 1991, č. 1.
- [12] VOGEL, T.: SWMI — Numerický model jednorozměrného proudění v nenasyčeném pórovitém prostředí. [Dissertační práce.] Praha, ČVUT, Fakulta stavební 1990.
- [13] VOGEL, T.: SWMI — Numerický model jednorozměrného proudění v nenasyčeném pórovitém prostředí. Příspěvek konference Hornická Příbram ve vědě a technice, Příbram 1989.

Do redakcie došlo 30. 7. 1990  
Diskusia otvorená do 31. 10. 1991

Jiří Šimůnek

In the article the results of two Lagrangian methods (the first one utilizes a deforming grid, the second one a fixed grid in deforming coordinates) are discussed and compared with the results of the Eulerian method (the governing equation is discretized on a grid fixed in space) and with the analytical solution. The first Lagrangian method — time depth particle tracking — is based on the calculation of the time depth curves which represent a deforming grid for solution of advection-dispersion equation. The method uses the balancing of moisture between particles for calculating their position instead of point velocities. The second Lagrangian method — single step reversed particle tracking — moves at each time step fictitious points from a backward position so that at the end of the time step they merge with fixed grid nodes. The Eulerian method uses the finite difference discretization in space and in time.

The agreement of the results of all three methods with the analytical solution is excellent for low Peclet numbers. For high Peclet numbers the Eulerian method becomes unstable whereas both Lagrangian methods show good agreement of the results.

List of symbols

- $c$  — concentration of the solution [ $M L^{-3}$ ],
- $C$  — hydraulic capacity [ $L^{-1}$ ],
- $C_u$  — local Courant number [—],
- $D$  — dispersion coefficient [ $L^2 T^{-1}$ ],
- $E_a$  — aktual evaporation [ $L T^{-1}$ ],
- $F$  — combined effect of linear decay in the solution and absorbed phases [ $T^{-1}$ ],
- $G$  — combined effect of zero-order decay in the solution and absorbed phases [ $M L^{-3} T^{-1}$ ],
- $h$  — pressure head [ $L$ ],
- $I_a$  — aktual infiltration [ $L T^{-1}$ ],
- $k$  — empirical distribution coefficient for linear adsorption [ $L^3 M^{-1}$ ],
- $K$  — hydraulic conductivity [ $L T^{-1}$ ],
- $N$  — flux through the soil surface [ $L T^{-1}$ ],
- $P$  — local Peclet number [—],
- $s$  — adsorbed concentration [—],
- $S$  — sink term [ $T^{-1}$ ],
- $W$  — cumulated water content [ $L$ ],
- $t$  — time [ $T$ ],
- $v$  — the average pore-flow velocity [ $L T^{-1}$ ],
- $x$  — distance [ $L$ ],
- $\rho$  — bulk density of the soil [ $M L^{-3}$ ],
- $\theta$  — volume moisture content [—],
- $\Delta x$  — space discretization [ $L$ ],
- $\Delta t$  — time discretization [ $T$ ].

DISKUSIA

Diskusní příspěvek k referátu Petra Kantora „Základní vazby celkového výparu a odtoku vody ze smrkových a bukových lesů“  
Vodohosp. Čas., 38, 1990, č. 3, s. 327—348

ALOIS CHLEBEK, MILAN JAŘABÁČ  
VÚ lesního hospodářství a myslivosti Jíloviště-Strnady,  
pracoviště 738 01 Frýdek-Místek, Střelníční 2327

Autor uvedeného referátu sestavil z literárních údajů soubor 31 průměrných ročních hodnot úhrnů srážek a odtoků, a obdobné soubory pro vegetační a mimovegetační období. Při jejich hodnocení bral v úvahu dřevinnou skladbu převládající v jejich povodích a zjistil, že bukové porosty mají nižší celkový výpar než smrkové porosty, což je průkazné i v odtocích z povodí. Tento závěr odpovídá představě Váalka [4], který v roce 1937 založil reprezentativní povodí Vaškovský potok v Bylnici, aby prokázal příznivý vliv bukových porostů na vodnost zkoumaného potoka.

Nevíme, zda pro tento referát byla použita data, která jsou v literatuře dostupná, nebo byl v přípravě práce proveden jejich výběr. Je třeba zhodnotit jejich srovnatelnost, protože pocházejí z různých geografických oblastí, z odlišných období měření, ze tří metodicky rozdílných zdrojů. Do tohoto souboru jsme přiřadili i Váalkova data z povodí Vaškovský potok, Kýchová a Zděchovka [4], přičemž prvně jmenovaná z daného rámce vybočují, ostatní se do něj řadí. Pro další hodnocení však pokládáme soubor za reprezentativní. Z dat uvedených v referátu jsme však nemohli pozměnit počátky vegetačního a mimovegetačního období. V našich klimatických poměrech se nezdá být vhodné přiřazovat měsíc květen k vegetačnímu období, protože odtoky zvýšené táním sněhu ve většině roků odeznívají až ve dnech tzv. „zmrzlých mužů“, a teprve potom nastává odtokový režim charakteristický pro vegetační období.

Potom jsme ještě diskutovali, do jaké míry lze ztotožňovat množství vody zachycené lyzimetry na pokusných ploškách se skutečnými odtoky z povodí. Setkáváme se v literatuře s pojmem tzv. disponibilní voda: takto by mělo být označováno jen ono množství vody, které lze pod povodím skutečně zachytit či odebrat. To však určitě není totožné s údaji lyzimetrů, kterými je v různé míře narušen přírodní půdní profil, přerušeno vztlínání půdní vody a poškozen systém kořenů bylin i dřevin. To je příčinou, že pronásobením dat zjištěných na ploškách plochou povodí bývají efekty nadhodnocovány. Při hodnocení bilančních vztahů bývá velká váha přisuzována interceptci (poměrně snadno měřitelné), ale podle měření v beskydských experimentálních povodích je celková ztráta vody víc formována evapotranspirací. Pohled na vodní účinky bukových porostů může být ovlivňován i nepřiměřeným přepočtem hodnot stoku vody po bukových kmenech na celou plochu povodí [3].

To však nejsou ty nejdůležitější poznatky. Zásadně bychom neměli pomíjet statistické testování průkaznosti výsledků, abychom vyloučili jejich subjektivní posuzování. Proto jsme z dat uvedených v tabulce I diskutovaného referátu vypočítali korelační závislosti  $y = A + Bx$  odtoků ( $y$ ) na srážkách ( $x$ ) ve smrkových (křížky) a bukových (plně kroužky) porostech (obr. 1). Na tomto obrázku jsou zakroužkovány hodnoty změřené v beskydských experimentálních povodích Červík (100% lesnatost, smrkové porosty) a Malá Ráztoka (stejná lesnatost, 2/3 buk, 1/3 smrk) podle [2].